5. PROGRAMMAZIONE LINEARE INTERA (PLI)

Un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI), in forma canonica, è definito come:

$$\begin{cases} z_{PLI} := \min c^T x \\ \text{soggetto a } Ax \geq b & \text{// il vincolo di interezza} \\ \quad x \geq 0 \text{ intero,} & \text{// NON è lineare!} \end{cases}$$

ove z_{PLI} rappresenta il valore ottimo della funzione obiettivo.

Il vincolo di interezza sulle variabili definisce un reticolo di punti in $\mathbb{R}^n$, alcuni dei quali (quelli che soddisfano $x \geq 0$, $Ax \geq b$) costituiscono la regione ammissibile del problema di PLI.

Nel seguito si farà l'ipotesi che A e b siano interi. Ipotizzeremo inoltre che il poliedro $P := \{x \geq 0 : Ax \geq b\}$ sia limitato e non vuoto, ed indicheremo con $X := P \cap \mathbb{Z}^n$ l'insieme (discreto e finito) delle soluzioni ammissibili del problema di PLI.

→ Rilassamento continuo = elimino il vincolo di interezza dal problema di PLI.

Relativamente allo stesso problema, z_{PL} rappresenta un lower bound per z_{PLI}, poiché $X \subseteq P$.

DEFINIZIONE 1:

Dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice CONVEX HULL (guscio convesso) di S il più piccolo insieme convesso $conv(S)$ che contiene S.

(TOTALE) UNIMODULARITÀ

DEFINIZIONE 2:

Una matrice intera A di dimensione $m \times n$ con $m \leq n$ si dice unimodulare se per ogni sua sottomatrice $m \times m$ B vale $\det(B) \in \{-1, 0, 1\}$.

TEOREMA 1:

Sia A unimodulare e b intero. Allora il poliedro $P := \{x \geq 0 : Ax = b\}$ ha solo vertici interi.

DEFINIZIONE 3:

Una matrice intera A di dimensione $m \times n$ si dice totalmente unimodulare (TUM) se $\det(Q) \in \{-1, 0, 1\}$ per ogni sua sottomatrice quadrata Q, di qualunque ordine.

TEOREMA 2:

Sia A TUM e b intero. Allora il poliedro $P := \{x \geq 0 : Ax \geq b\}$ ha solo vertici interi.

TEOREMA 3: // CONDIZIONE SUFFICIENTE MA NON NECESSARIA.

Sia A una matrice con $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ $\forall i, j$. A è totalmente unimodulare se valgono le seguenti condizioni:

1) Ogni colonna di A non ha più di due elementi non nulli;
2) esiste una partizione (I_1, I_2) delle righe di A tale che ogni colonna con due elementi non nulli ha questi due elementi su righe appartenenti ad insiemi I_1 e I_2 diversi se e solo se i due elementi sono concordi in segno.

PROPOSIZIONE 1:

La matrice A è TUM se e solo se

- A^T è TUM;
- la matrice A' ottenuta da A permutando e/o cambiando di segno ad alcune colonne e/o righe è TUM;
- le matrici $\left[\begin{matrix}\pm 1\\0\\0\\0\\0\end{matrix}\middle| A\right]$ e $\left[\begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix}\middle| A\right]$ sono TUM.

// Il problema dei trasporti come modello di PLI.

ALGORITMO CUTTING-PLANE:

In generale, la matrice dei vincoli non è TUM, e quindi la soluzione x^* del suo rilassamento continuo ha tipicamente una o più componenti frazionarie; in questo caso è possibile utilizzare la tecnica dei piani di taglio (cutting-plane).

Si consideri un problema di PLI in forma standard $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0 \text{ intero}\}$, e sia $P := \{x \geq 0 : Ax = b\}$ il politopo associato al suo rilassamento continuo.

DEFINIZIONE 4:

Dato $x^* \in P$ si dice taglio una disuguaglianza del tipo $\alpha^T x \leq \alpha_0$ tale che:

1) $\alpha^T x \leq \alpha_0, \quad \forall x \in X := P \cap \mathbb{Z}^n$
2) $\alpha^T x^* > \alpha_0$

Le condizioni 1 e 2 esprimono il fatto che la disuguaglianza $\alpha^T x \leq \alpha_0$ risulta valida per X, ma violata dal punto x^*.
Dato x^*, il problema di individuare un taglio del tipo $\alpha^T x \leq \alpha_0$ viene detto problema di separazione di x^* da X.

TAGLI DI GOMORY

BRANCH-AND-BOUND